**Ex 0** 复习一些行列式的计算技巧.

1. (扰动法) 本质: 若**数域**上的多项式 有 个零点, 则 . 该方法的主要应用情形如下.

* 许多时候, 我们需要从 推导 , 但有时出现 . 此时记 , 则通常能从题设推出恒等式 . 多项式
* 存在足够多的零点, 从而是恒零多项式. 代入 即可.
  + 不建议使用 这类表述. 一方面, 需要额外说明连续性; 另一方面, 这无法兼容扰动法在有限域上的推广.

1. (初等变换法) 使用矩阵的初等变换技巧.
2. (添边法) 即, 等式 . 这一方法也可用在分块矩阵上.
3. (逆矩阵法) 有时计算逆矩阵比计算行列式简单很多, 尤其是套用 之类的公式时.
4. (Laplace 展开) 由于 关于第 列线性, 从而会出现 之类的式子.
5. (数学归纳法)
6. (特征根法)
7. ...

**Ex 1** 以下给出一个函数线性无关的判别法则. 所有线性空间是 上的.

1. 记 是一切 的函数构成的集合. 试说明 是线性空间.

* 答: 是一个加法交换群. 定义 的 -线性结构如下:
  1. ;
  2. .

1. 对任意 , 证明以下由 决定的映射 是线性映射

* 答: 验证 .

1. 给定 中的函数 . 证明: 若存在实数 使得 是可逆矩阵, 则 是线性无关组.

* 答: 考虑逆否命题. 若非平凡的线性组合式 是零, 则 恒成立. 此时, 向量 在矩阵的左零空间中. 因此矩阵不可逆.

1. 反之, 若给定 中的线性无关组 , 则存在实数 使得 是可逆矩阵.

* 答: 对一切 , 记 的线性子空间 .
  + 我们断言 . 因为 当且仅当 对一切 成立.
* 记 的 -维子空间 . 定义 . 此时 , 且 . 以下给出 's 的构造.
  1. 取 使得 .
  2. 由于 , 因此存在 使得 .
  3. 依照上述步骤. 对任意 , 可以找到 使得 .

**Ex 2** (On positivity of real matrices) Throughout, .

1. Show that .

* 答: 依照 中的初等变换:
* 此时 .

1. Suppose . Show that .

* 答: 只需证明 . 记 , 则 . 考虑零空间等式 , 得 . 也可以对 使用 Cauchy-Binet 公式.

1. Suppose that , , , and . Show that

* Hint: set , and consider .
* 答: 由于 , 与 两两可交换, 则
* 代入 . 此时
* 非负.

1. Suppose . Show that if , then for any .

* 答: 依 , 只需证明 为奇数与 的情形.
  1. 若 , 则 .
  2. 记 是 -次单位根, 则
  + 两侧取 , 左式非负.

**Ex 3** (Adj 矩阵的基本性质) 记 与 是同阶的列向量. 必要时假设数域.

1. 写出 , , , , 以及 .

* 答: 真有人写 , 这是意料之中而情理之外的. 以下是后四个常用式子的表达:
  1. ;
  2. ;
  3. ;
  4. ;

1. 通过 的秩讨论 的秩.

* 答: 使用相抵标准型 , 则 . 从而 .
  1. 若 满秩, 则 亦然;
  2. 若 秩为 , 则 的秩为 ;
  3. 若 秩 , 则 .

1. 证明: 是一个数量矩阵与一个秩 矩阵的和, 并写出相应的表达式.

* 答: (省略关于扰动法的说明) 不妨假定矩阵可逆, 则

1. 证明: .

* 答: 对最后一行或最右一列使用 Laplace 展开.
* 也可以使用扰动法, 假设 可逆, 考虑初等变换
* 代入 , 后略.

1. 证明: .

* 答: 使用 化作上一题.
* 也可以直接使用 Laplace 展开: 记 是 的第 列, 是秩 矩阵 的第 列. 依照 关于各列线性, 得
* 右式是 个数的和. 假若 中出现两个 , 则行列式为 , 从而右式可化作是 个数的和. 对出现 的 个式子, 对 所在的列进行 Laplace 展开即可.

1. 记 是所有代数余子式的和, 即, 中所有元素的和. 假定 是 阶的.
   1. 若 的某一列向量 (或某一行向量) 是常数向量 , 求 与 的比值.
   * 答: 若 的第 列是 , 则 . 那么
   1. 若 的每一列向量 (或每一行向量) 中各项元素的和是常数 , 求 与 的比值.
   * 答: 解答题干取行的情形. 此时 .
   1. 若 的行空间与 垂直 (即, 所有行向量的各项元素和为 ), 则 的所有行向量相同.
   * 答: 只需证明 的情况 (不然, ). 此时, 有更一般的结论
   * 由 知右式含于左式, 比较维数知两侧相等.
   1. 若 的行空间与列空间均与 垂直, 则 是全 矩阵 的数乘倍, 即,
   * 答: 由 , 以及上一问结论, 必然是 的数乘倍. 下验证 是这个常数. 记
   * 从而 .

**Ex 4** 关于 Adj 矩阵.

1. 记 , 简要说明以下是线性映射:

* 请找到 , 使得 .
* 答: 按最后一行进行 Laplace 展开.

1. 试证明, 形如

* 答: 矩阵 的每一项都是 中某一 -阶子式的行列式, 因此是次数不超过 的多项式.

1. 沿用上一题记号, 证明 是数量矩阵 (也就是形如 的矩阵).

* 答: 是数量矩阵, 递推即可.

**Ex 5** 求

答: 记原式为 . 以下是三种常见的做法.

1. 对第一行做初等变换 , 提取公因式 .
2. 依照学习四元数或正交矩阵时的经验, 可以发现 是数量矩阵. 比较符号即得答案.
3. 直接展开 (不推荐).

注: 对技巧类的问题, 算出类似的答案即可. 不必纠结三次单位根的问题.

**Ex 6** 记 . 所有矩阵是实的.

1. 证明 .

* 答: 记 , 则
* 依照矩阵初等变换,

1. 若 , 则称 是好玩的. 证明 .

* 答: 对 取行列式, 得
* 从而 只能是正数.
  + 第一处 说明如下: 对 使用 Cauchy-Binet 公式计算行列式, 其和式中所有数非负, 且至少有一个正数.

1. 证明以下三类矩阵是好玩的:
   1. (-类矩阵) , 其中 是对称矩阵;
   2. (-类矩阵) , 其中 是可逆矩阵;
   3. (-类矩阵) 满足特定条件的形如 的矩阵, 所谓的特定条件就是 对应的分块矩阵等式.
2. 证明好玩矩阵构成乘法群 . 试问: 对上述 , 与 这三个集合, 哪些集合可以视作 的子群?
3. 证明岩澤分解 . 换言之, 任何好矩阵形如乘积

* 答: 乘法群 中满足 的矩阵必属于 . 因此只需证明, 对任意 总有分解 , 其中 , .
* 之后就是待定系数, 进行构造与验证.

1. 证明 就是酉矩阵群 . 对应方式是
2. 在熟悉酉矩阵后, 我们将借用[Siegel 上半平面模型](https://en.wikipedia.org/wiki/Siegel_upper_half-space)介绍一类特殊的矩阵变换: Cayley 变换.

**Challenges**

1. 选定数域. 将 Vandermonde 行列式修改如下: 记 是正实数, 是两两不等的正实数. 证明 .

* 答: 若这一行列式为 , 则存在一个非零指数函数
* 使得 在 上有 个零点. 依照数学归纳法, 的零点数量至多为

1. 若实矩阵 各项非负, 各项亦非负, 试求 ?

* 答: 这是一个脑筋急转弯. 今断言: 所有符合条件的 必然是置换矩阵与对角矩阵的乘积, 也就是每行每列恰有一项非负, 其余项为 的矩阵.
  + 若 形如此, 则 与 均是各项非负的.
  + 若 不形如此, 不妨设 . 此时必然有
  + 这与 可逆矛盾.